Vibrations et Ondes

Partie 1 (Vibrations)

Chapitre IV

Systèmes Linéaires Forcés à un Seul Degré de Liberté

Équation Généralisée de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}} + \mathcal{F}.$$

Translations: $q = x, y, z...$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{x}} + F.$$

Rotations: $q = \theta, \varphi, ...$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\theta}} + \mathcal{M}.$$

Équation du Mouvement $\longrightarrow$ **Solution Permanente**

$\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = (F_0/a)\cos\Omega t \longrightarrow q(t) = A\cos(\Omega t + \phi)$

$\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = (F_0/a)\sin\Omega t \longrightarrow q(t) = A\sin(\Omega t + \phi)$

Calcul de A et ϕ à l'aide de la Représentation Complexe

$$F_0\cos\Omega t \longrightarrow F_0 e^{j\Omega t}$$
$$q(t) = A\cos(\Omega t + \phi) \longrightarrow \underline{q}(t) = \underline{A}e^{j\Omega t}$$
$$\ddot{\underline{q}} + 2\lambda\dot{\underline{q}} + \omega_0^2\underline{q} = (F_0/a)e^{j\Omega t} \Longrightarrow$$

$$\underline{A} = \frac{(F_0/a)}{\omega_0^2 - \Omega^2 + j2\lambda\Omega}. \quad A = \frac{(F_0/a)}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}. \quad \tan\phi = -\frac{2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

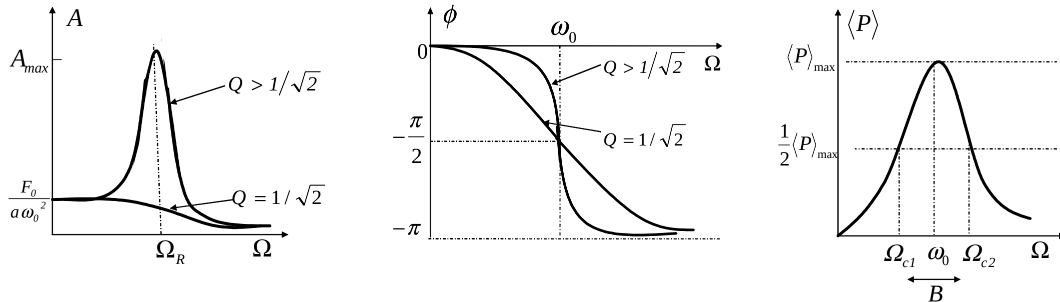
Pulsations de Résonance

$$\frac{\partial A}{\partial \Omega} = 0 \Longrightarrow \Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}. \text{ (résonance d'amplitude)}$$
$$\tan\phi = -\infty \Longrightarrow \Omega = \omega_0. \text{ (résonance de phase: } \phi = -\frac{\pi}{2}\text{)}$$

Amplitude Maximale et Puissance Moyenne

$$A_{\max} = \frac{F_0/a}{\sqrt{4\lambda^2\omega_0^2 - 4\lambda^4}}. \quad \langle\mathcal{P}\rangle = \frac{\Omega^2\lambda\left(F_0^2/a\right)}{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}. \quad \langle\mathcal{P}\rangle_{\max} = \frac{F_0^2}{4\lambda a}$$

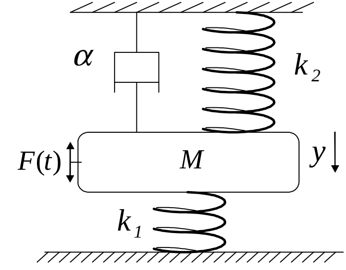
Graphes



Pulsations de Coupure, Bande Passante, et Facteur de Qualité $(\lambda \ll \omega_0)$

$$\Omega_{c1} \approx \omega_0 - \lambda. \quad \Omega_{c2} \approx \omega_0 + \lambda. \quad B = \Omega_{c2} - \Omega_{c2} = 2\lambda. \quad Q = \omega_0/B$$

1) TRANSLATIONS OSCILLATOIRES EXCITÉES



1.1. Soit le système excité ci-contre. $F(t) = F_0 \cos \Omega t$.

1. **Trouver** T, U, **et la fonction de dissipation** $\mathcal{D}$.
2. **Trouver le Lagrangien puis l'équation du mouvement.**
3. **Trouver** en utilisant la représentation complexe **la solution permanente de l'équation.** (Préciser son amplitude réelle A et sa phase ϕ.)
4. **Trouver la pulsation de résonance** Ω_R.
5. **Trouver la puissance moyenne** $\langle \mathcal{P} \rangle$ **fournie au système.**
6. **Déduire la puissance moyenne maximale** $\langle \mathcal{P} \rangle_{\max}$ **fournie au système.**
7. **Déduire les pulsations de coupure** Ω_{c1} **et** Ω_{c2} **pour lesquelles** $\langle \mathcal{P} \rangle = \langle \mathcal{P} \rangle_{\max}/2$.
   Déduire la bande passante $B = \Omega_{c1} - \Omega_{c2}$. (On suppose $\lambda \ll \omega_0$:amortissement très faible)
8. **Trouver la puissance moyenne** $\langle \mathcal{P}_r \rangle$ **dissipée par frottement.**

Solution :

1. $T = T_M = \frac{1}{2} M \dot{y}^2$.

$$U = U_M + U_{k_1} + U_{k_2} = -Mgy + \tfrac{1}{2}k_1(y_0 + y)^2 + \tfrac{1}{2}k_2(y_0 + y)^2$$
$$= -Mgy + k_1 y_0 y + k_2 y_0 y + \tfrac{1}{2}k_1 y^2 + \tfrac{1}{2}k_2 y^2 + \mathrm{C}^{te}$$
$$= \tfrac{1}{2}k_1 y^2 + \tfrac{1}{2}k_2 y^2 + \mathrm{C}^{te}.$$ (Grâce à la condition d'équilibre.) $\mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha \dot{y}^2$.

2. $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2} M \dot{y}^2 - \frac{1}{2}k_1 y^2 - \frac{1}{2}k_2 y^2 + \mathrm{C}^{te}$.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{y}} + F \Longrightarrow \boxed{\ddot{y} + \frac{\alpha}{M}\dot{y} + \frac{k_1 + k_2}{M} y = \frac{F_0}{M}\cos \Omega t.}$$

3. L'équation est de la forme $\ddot{y} + 2\lambda \dot{y} + \omega_0^2 y = (F_0/M)\cos\Omega t$. $\lambda = \frac{\alpha}{2M}$. $\omega_0^2 = \frac{k_1+k_2}{M}$.

La solution permanente est $y = A\cos(\Omega t + \phi)$. Utilisons la représentation complexe pour trouver A et ϕ:

$$\boxed{\begin{array}{c}(F_0/M)\cos\Omega t \longrightarrow (F_0/M)e^{j\Omega t} \\ y = A\cos(\Omega t + \phi) \longrightarrow \underline{y} = \underline{A}e^{j\Omega t}\end{array}}$$

On obtient $-\Omega^2 \underline{A}e^{j\Omega t} + 2\lambda j\Omega \underline{A}e^{j\Omega t} + \omega_0^2 \underline{A}e^{j\Omega t} = (F_0/M)\, e^{j\Omega t} \Longrightarrow \underline{A} = \dfrac{F_0/M}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2\lambda j\Omega}$.

L'amplitude est $\boxed{A = \dfrac{F_0/M}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}.}$ La phase est donnée par $\boxed{\tan\phi = \dfrac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.}$

4. La pulsation de résonance est Ω_R telle que $\left.\frac{\partial A}{\partial \Omega}\right|_{\Omega_R} = 0 \Longrightarrow \left.\dfrac{-4\Omega(\omega_0^2 - \Omega^2) + 8\lambda^2\Omega}{\left[(\omega_0^2-\Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2\right]^{3/2}}\right|_{\Omega_R} = 0$

$$\Longrightarrow \boxed{\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}.}$$

5. La puissance moyenne fournie au système est:

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T F\dot{y}dt = -\frac{1}{T}\int_0^T \Omega A F_0 \cos\Omega t \sin(\Omega t + \phi) = -\frac{1}{2T}\int_0^T \Omega A F_0 \left[\sin\phi + \sin(2\Omega t + \phi)\right]$$

$= -\frac{1}{2}\Omega A F_0 \sin\phi$. Puisque $\sin\phi = \dfrac{\tan\phi}{\sqrt{1 + \tan^2\phi}}$ on obtient $\boxed{\langle \mathcal{P} \rangle = \dfrac{\Omega^2\lambda\left(F_0^2/M\right)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}.}$ (1)

6. $\langle \mathcal{P} \rangle$ est maximale lorsque $\frac{\partial \langle \mathcal{P} \rangle}{\partial \Omega} = 0 \Longrightarrow \Omega = \omega_0$. En remplaçant dans (1): $\boxed{\langle \mathcal{P} \rangle_{\max} = \dfrac{F_0^2}{4\lambda M}.}$

7. $\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\langle \mathcal{P} \rangle_{\max}}{2} \Longrightarrow \frac{\Omega^2\lambda}{(\omega_0^2-\Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2} = \frac{1}{8\lambda} \Longrightarrow \Omega_{c1} = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}$. $\Omega_{c2} = \lambda + \sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}$.

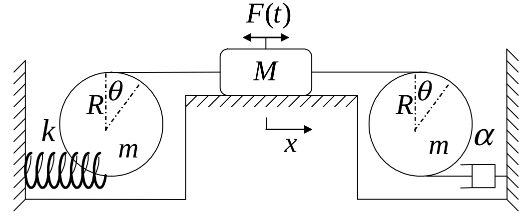
Pour un amortissement faible $\lambda \ll \omega_0$: $\boxed{\Omega_{c1} \approx \omega_0 - \lambda. \quad \Omega_{c2} \approx \omega_0 + \lambda.}$ $\boxed{B = \Omega_{c2} - \Omega_{c1} = 2\lambda.}$

8. La puissance moyenne dissipée par le frottement est:

$$\langle \mathcal{P}_r \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f_r \dot{y}dt = \frac{1}{T}\int_0^T \alpha \dot{y}^2 dt = \frac{1}{T}\int_0^T \Omega^2\alpha A^2 \sin^2(\Omega t + \phi)dt = \frac{1}{2T}\int_0^T \Omega^2\alpha A^2\left[1 - \cos 2(\Omega t + \phi)\right]dt$$
$$= \frac{1}{2}\Omega^2\alpha A^2$$
$$= \boxed{\frac{1}{2}\frac{\Omega^2\alpha (F_0/M)^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}.}$$

1.2. Le fil autour des disques ci-contre est inextensible et non glissant. $F(t) = F_0 \sin \Omega t$.

1. **Trouver** T, U, **et la fonction de dissipation** $\mathcal{D}$
2. **Trouver le Lagrangien puis l'équation du mouvement en fonction de** x.($\theta \ll 1$)
3. **Trouver** en utilisant la représentation complexe **la solution permanente de l'équation.** (Préciser son amplitude réelle A et sa phase ϕ.)



4. **Donner la pulsation de résonance** Ω_R.
5. **Donner les pulsations de coupure** Ω_{c1}, Ω_{c2}, **et déduire la bande passante** B ($\lambda \ll \omega_0$.)
6. **Calculer** Ω_R, B, **et le facteur de qualité pour** $M = 2$kg, $m = 1$kg, $k = 27$N/m, $\alpha = 0,6$N.s/m.

Solution :

1. $T = T_M + T_m + T_m = \frac{1}{2}M \dot{x}^2 + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}mR^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}mR^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2$. (Car $R\theta = x$.)

$U = U_k \approx \frac{1}{2}k(R\theta)^2 = \frac{1}{2}kx^2$. $\mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha v^2 = \frac{1}{2}\alpha(R\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}\alpha \dot{x}^2$.

2. $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$. $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{x}} + F \Longrightarrow$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{\alpha}{M+m}\dot{x} + \frac{k}{M+m}x = \frac{F_0}{M+m}\sin \Omega t.}$$

3. L'équation est de la forme $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = (F_0/a)\sin\Omega t$. $\lambda = \frac{\alpha}{2(M+m)}$. $\omega_0^2 = \frac{k}{M+m}$. $a = M + m$.
La solution permanente est $x = A\sin(\Omega t + \phi)$. Utilisons la représentation complexe pour trouver A et ϕ:

$$\boxed{\begin{array}{c}(F_0/a)\sin\Omega t \longrightarrow (F_0/a)e^{j\Omega t} \\ x = A\sin(\Omega t+\phi) \longrightarrow \underline{x} = \underline{A}e^{j\Omega t}\end{array}}$$

On obtient $-\Omega^2 \underline{A}e^{j\Omega t} + 2\lambda j\Omega \underline{A}e^{j\Omega t} + \omega_0^2 \underline{A}e^{j\Omega t} = \frac{F_0}{a}e^{j\Omega t} \Longrightarrow \underline{A} = \frac{F_0/a}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2\lambda j\Omega}$.

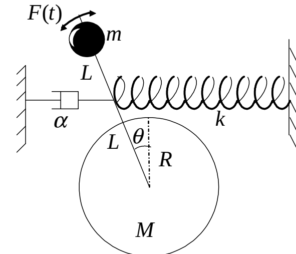
L'amplitude est $\boxed{A = \frac{F_0/a}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}.}$ La phase est donnée par $\boxed{\tan\phi = \frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.}$

4. La pulsation de résonance (pour $\frac{\partial A}{\partial \Omega} = 0$) est $\boxed{\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}.}$

5. Lorsque $\lambda \ll \omega_0$: $\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\langle \mathcal{P} \rangle_{\max}}{2}$ pour $\boxed{\Omega_{c1} \approx \omega_0 - \lambda. \quad \Omega_{c2} \approx \omega_0 + \lambda.} \Longrightarrow \boxed{B = \Omega_{c2} - \Omega_{c1} = 2\lambda.}$

6. A.N: $\Omega_R \approx \mathbf{3}$rad/s. $B = \mathbf{0,2}$Hz. Le facteur de qualité est $Q = \omega_0/B = \mathbf{15}$.

2) ROTATIONS OSCILLATOIRES EXCITÉES



2.1. Soit le système excité ci-contre. $F(t) = F_0 \cos \Omega t$.

1. **Trouver** T, U, **et la fonction de dissipation** $\mathcal{D}$. ($\theta \ll 1$.)
2. **Trouver le Lagrangien puis l'équation du mouvement.**
3. **Trouver** en utilisant la représentation complexe **la solution permanente de l'équation.** (Préciser son amplitude A et sa phase ϕ.)
4. **Donner la pulsation de résonance** Ω_R.
5. **Donner les pulsations de coupure** Ω_{c1}, Ω_{c2} **et déduire la bande passante** B ($\lambda \ll \omega_0$.)
6. **Calculer** Ω_R, B, **et le facteur de qualité pour** $M = 2$kg, $m = 1$kg, $k = 51$N/m, $\alpha = 0,3$N.s/m, $R = 25$cm, $L = 50$cm, $g = 10$m/s^2.

Solution :

1. $T = T_M + T_m = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(2L\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}MR^2 + 4mL^2)\dot{\theta}^2$.

$U = U_m + U_k \approx -mg(2L - 2L\cos\theta) + \frac{1}{2}k(L\sin\theta)^2 \approx (\frac{1}{2}kL^2 - mgL)\theta^2$. $\mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha v^2 = \frac{1}{2}\alpha(L\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}\alpha L^2\dot{\theta}^2$.

2. $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}MR^2 + 4mL^2)\dot{\theta}^2 - (\frac{1}{2}kL^2 - mgL)\theta^2$. $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\theta}} + F.2L \Longrightarrow$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{2\alpha L^2}{MR^2 + 8mL^2}\dot{\theta} + \frac{2(kL^2 - 2mgL)}{MR^2 + 8mL^2}\theta = \frac{4F_0 L}{MR^2 + 8mL^2}\cos\Omega t.}$$

3. De la forme $\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = (4F_0L/a)\cos\Omega t$. $\lambda = \frac{\alpha L^2}{MR^2+8mL^2}$. $\omega_0^2 = \frac{2(kL^2-2mgL)}{MR^2+8mL^2}$. $a = MR^2 + 8mL^2$.
La solution permanente est $\theta = A\cos(\Omega t + \phi)$. Utilisons la représentation complexe pour trouver A et ϕ:

$$\boxed{\begin{array}{l}(4F_0L/a)\cos\Omega t \longrightarrow (4F_0L/a)e^{j\Omega t}\\ \theta = A\cos(\Omega t + \phi) \longrightarrow \underline{\theta} = \underline{A}e^{j\Omega t}.\end{array}}$$

On obtient $-\Omega^2\underline{A}e^{j\Omega t} + 2\lambda j\Omega\underline{A}e^{j\Omega t} + \omega_0^2\underline{A}e^{j\Omega t} = (4F_0L/a)e^{j\Omega t} \Longrightarrow \underline{A} = \dfrac{4F_0L/a}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2\lambda j\Omega}$.

L'amplitude est $\boxed{A = \frac{4F_0L/a}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}.}$ La phase est donnée par $\boxed{\tan\phi = \frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}.}$

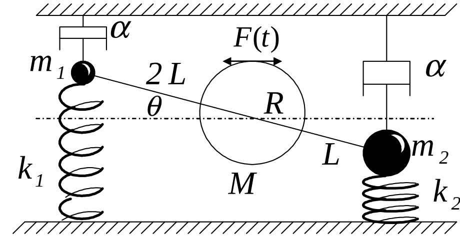
4. La pulsation de résonance (pour $\frac{\partial A}{\partial \Omega} = 0$) est $\boxed{\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}.}$

5. Lorsque $\lambda \ll \omega_0$: $\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\langle \mathcal{P} \rangle_{\max}}{2}$ pour $\boxed{\Omega_{c1} \approx \omega_0 - \lambda. \quad \Omega_{c2} \approx \omega_0 + \lambda.} \Longrightarrow \boxed{B = \Omega_{c2} - \Omega_{c1} = 2\lambda.}$

6. A.N: $\Omega_R \approx \mathbf{1,14}$rad/s. $B \approx \mathbf{0,06}$Hz. Le facteur de qualité est $Q = \omega_0/B \approx \mathbf{19}$.

2.2. Soit le système ci-contre. $F(t) = F_0 \sin\Omega t$.

1. **Trouver T, U, et la fonction de dissipation $\mathcal{D}$.**
2. **Trouver le Lagrangien puis l'équation du mouvement en fonction de $\theta \ll 1$.**
3. **Trouver** en utilisant la représentation complexe **la solution permanente de l'équation.** (Préciser son amplitude réelle A et sa phase ϕ.)
4. **Donner la pulsation de résonance** Ω_R.
5. **Donner les pulsations de coupure** Ω_{c1}, Ω_{c2} **et déduire la bande passante** B ($\lambda \ll \omega_0$.)
6. **Calculer** Ω_R, B, **et le facteur de qualité pour** $M = 3$kg, $m_1 = 1$kg, $m_2 = 2$kg, $\alpha = 0,5$N.s/m, $R = 0,5$m, $L = 1$m, $k_1 = 12$N/m, $k_2 = 20$N/m.



Solution :

1. $T = T_{m_1} + T_M + T_{m_2} = \frac{1}{2}m_1(2L\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_2(L\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}MR^2 + 4m_1L^2 + m_2L^2)\dot{\theta}^2$.
$U = U_{m_1} + U_{k_1} + U_{m_2} + U_{k_2} \approx 2m_1gL\theta + \frac{1}{2}k_1(y_{01} + 2L\theta)^2 - m_2gL\theta + \frac{1}{2}k_2(y_{02} + L\theta)^2$.
$\approx \frac{1}{2}(4k_1 + k_2)L^2\theta^2 + C^{te}$.

(La condition d'équilibre élimine les termes linéaires en θ.) $\mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha v_1^2 + \frac{1}{2}\alpha v_2^2 = 2\alpha L^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\alpha L^2\dot{\theta}^2 = \frac{5}{2}\alpha L^2\dot{\theta}^2$.

2. $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}[\frac{1}{2}MR^2 + (4m_1 + m_2)L^2]\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(4k_1 + k_2)L^2\theta^2$. $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\theta}} + FR \Longrightarrow$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{10\alpha L^2}{MR^2 + (8m_1 + 2m_2)L^2}\dot{\theta} + \frac{(8k_1 + 2k_2)L^2}{MR^2 + (8m_1 + 2m_2)L^2}\theta = \frac{2F_0R}{MR^2 + (8m_1 + 2m_2)L^2}\sin\Omega t.}$$

3. L'équation est de la forme $\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = (2F_0R/a)\sin\Omega t$.

$\lambda = \frac{5\alpha L^2}{MR^2+(8m_1+2m_2)L^2}$. $\omega_0^2 = \frac{(8k_1+2k_2)L^2}{MR^2+(8m_1+2m_2)L^2}$. $a = MR^2 + (8m_1 + 2m_2)L^2$.

La solution permanente est $\theta = A\sin(\Omega t + \phi)$. Utilisons la représentation complexe pour trouver A et ϕ:

$$\boxed{\begin{array}{l}(2F_0R/a)\sin\Omega t \longrightarrow (2F_0R/a)e^{j\Omega t}\\ \theta = A\sin(\Omega t + \phi) \longrightarrow \underline{\theta} = \underline{A}e^{j\Omega t}.\end{array}}$$

On obtient $-\Omega^2\underline{A}e^{j\Omega t} + 2\lambda j\Omega\underline{A}e^{j\Omega t} + \omega_0^2\underline{A}e^{j\Omega t} = (2F_0R/a)e^{j\Omega t} \Longrightarrow \underline{A} = \dfrac{2F_0R/a}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2\lambda j\Omega}$.

L'amplitude est $\boxed{A = \frac{2F_0R/a}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}.}$ La phase est donnée par $\boxed{\tan\phi = \frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}.}$

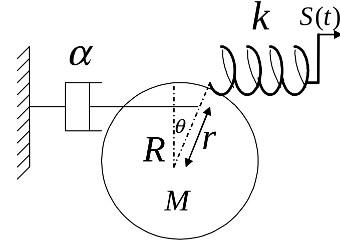
4. La pulsation de résonance (pour $\frac{\partial A}{\partial \Omega} = 0$) est $\boxed{\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}.}$

5. Lorsque $\lambda \ll \omega_0$: $\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\langle \mathcal{P} \rangle_{\max}}{2}$ pour $\boxed{\Omega_{c1} \approx \omega_0 - \lambda. \quad \Omega_{c2} \approx \omega_0 + \lambda.} \Longrightarrow \boxed{B = \Omega_{c2} - \Omega_{c1} = 2\lambda.}$

6. A.N: $\Omega_R \approx \mathbf{3,25}$rad/s. $B \approx \mathbf{0,39}$Hz. Le facteur de qualité est $Q = \omega_0/B \approx \mathbf{8,33}$.

3) Excitation Induite par un Déplacement

3.1 Soit le système ci-contre. Un déplacement $S(t) = S_0 \cos \Omega t$ **est imposé sur l'extrémité droite du ressort** k.



1. **Trouver** T, U, **et la fonction de dissipation** $\mathcal{D}$. $(\theta \ll 1)$
2. **Trouver le Lagrangien puis l'équation du mouvement.**
3. **Trouver** en utilisant la représentation complexe **la solution permanente.** (Préciser son amplitude réelle A et sa phase ϕ.)
4. **Trouver la pulsation de résonance** Ω_R.
5. **Donner les pulsations de coupure** Ω_{c1}, Ω_{c2}, **et déduire la bande passante** B $(\lambda \ll \omega_0)$.
6. **Calculer** Ω_R, B, **et le facteur de qualité pour** $M = 2$kg, $k = 19$N/m, $\alpha = 0,6$N.s/m, $R = 1m$, $r = 75$cm.

Solution :

1. $T = T_M = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2$.

$U = U_k \approx \frac{1}{2}k(S - R\sin\theta)^2 \approx \frac{1}{2}k(S - R\theta)^2$. $\quad \mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha v^2 = \frac{1}{2}\alpha(r\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}\alpha r^2\dot{\theta}^2$.

2. $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k(S - R\theta)^2$. $\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\theta}} \Longrightarrow \frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta} - kR(S - R\theta) = -\alpha r^2\dot{\theta}$

$$\Longrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{2\alpha r^2}{MR^2}\dot{\theta} + \frac{2k}{M}\theta = \frac{2kS_0}{MR}\cos\Omega t.}$$

3. L'équation est de la forme $\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = (2kS_0/MR)\cos\Omega t$. $\quad \lambda = \frac{\alpha r^2}{MR^2}$. $\quad \omega_0^2 = \frac{2k}{M}$.

La solution permanente est $\theta = A\cos(\Omega t + \phi)$. Utilisons la représentation complexe pour trouver A et ϕ:

$$\boxed{\begin{array}{l}(2kS_0/MR)\cos\Omega t \longrightarrow (2kS_0/MR)e^{j\Omega t} \\ x = A\cos(\Omega t + \phi) \longrightarrow \underline{x} = \underline{A}e^{j\Omega t}.\end{array}}$$

On obtient $-\Omega^2\underline{A}e^{j\Omega t} + 2\lambda j\Omega\underline{A}e^{j\Omega t} + \omega_0^2\underline{A}e^{j\Omega t} = (2kS_0/MR)e^{j\Omega t} \Longrightarrow \underline{A} = \dfrac{2kS_0/MR}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2\lambda j\Omega}$.

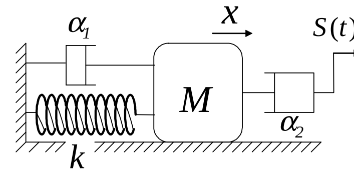
L'amplitude est $\boxed{A = \dfrac{2kS_0/MR}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}.}$ La phase est donnée par $\boxed{\tan\phi = \dfrac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.}$

4. La pulsation de résonance (pour $\frac{\partial A}{\partial \Omega} = 0$) est $\boxed{\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}.}$

5. Lorsque $\lambda \ll \omega_0$: $\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\langle \mathcal{P} \rangle_{\max}}{2}$ pour $\boxed{\Omega_{c1} \approx \omega_0 - \lambda. \quad \Omega_{c2} \approx \omega_0 + \lambda.} \Longrightarrow \boxed{B = \Omega_{c2} - \Omega_{c1} = 2\lambda.}$

6. A.N: $\Omega_R \approx \mathbf{4,35}$rad/s. $\quad B \approx \mathbf{0,34}$Hz. Le facteur de qualité est $Q = \omega_0/B \approx \mathbf{12,8}$.

3.2 Soit le système ci-contre. Un déplacement $S(t) = S_0 \sin \Omega t$ **est imposé sur l'extrémité droite de l'amortisseur** α_2.



1. **Trouver** T, U, **et la fonction de dissipation** $\mathcal{D}$.
2. **Trouver le Lagrangien puis l'équation du mouvement.**
3. **Trouver** à l'aide de la représentation complexe **la solution permanente.** (Préciser son amplitude réelle A et sa phase ϕ.)
4. **Trouver la pulsation de résonance** Ω_R.

Solution :

1. $T = T_M = \frac{1}{2}M\dot{x}^2$. $\quad U = U_k = \frac{1}{2}kx^2$. $\quad \mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha_1 v^2 + \frac{1}{2}\alpha_2 v^2 = \frac{1}{2}\alpha_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\alpha_2(\dot{S} - \dot{x})^2$.

2. $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$. $\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{x}} \Longrightarrow M\ddot{x} + kx = -\alpha_2\dot{x} + \alpha_2(\dot{S} - \dot{x})$

$$\Longrightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{M}\dot{x} + \frac{k}{M}x = \frac{\alpha_2\dot{S}}{M} \Longrightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{M}\dot{x} + \frac{k}{M}x = \frac{\alpha_2\Omega S_0}{M}\cos\Omega t.}$$

3. L'équation est de la forme $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = (\Omega\alpha_2 S_0/M)\cos\Omega t$. $\quad \lambda = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2M}$. $\quad \omega_0^2 = \frac{k}{M}$.

La solution permanente est $x = A\cos(\Omega t + \phi)$. Utilisons la représentation complexe pour trouver A et ϕ:

$$\boxed{\begin{array}{l}(\alpha_2 \Omega S_0/M)\cos\Omega t \longrightarrow (\Omega\alpha_2 S_0/M)e^{j\Omega t} \\ x = A\cos(\Omega t+\phi) \longrightarrow \underline{x}=\underline{A}e^{j\Omega t}.\end{array}}$$

On obtient $-\Omega^2\underline{A}e^{j\Omega t} + 2\lambda j\Omega\underline{A}e^{j\Omega t} + \omega_0^2\underline{A}e^{j\Omega t} = (\Omega\alpha_2 S_0/M)e^{j\Omega t} \Longrightarrow \underline{A} = \dfrac{\Omega\alpha_2 S_0/M}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2\lambda j\Omega}$.

L'amplitude est $\boxed{A = \dfrac{\Omega\alpha_2 S_0/M}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}.}$ La phase est $\boxed{\phi = \arctan\dfrac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}.}$

4. Attention: *La formule du cours* ($\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$) *ne s'applique pas directement pour cet exercice car au numérateur de l'amplitude A nous avons aussi la pulsation Ω, et ce cas n'a pas été vu en cours. Pour trouver Ω_R il faut effectuer un calcul complet analogue à celui du cours:*

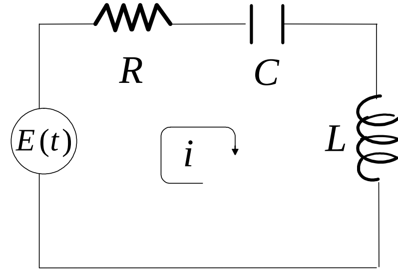
La pulsation de résonance est donnée par $\frac{\partial A}{\partial\Omega} = 0 \Longrightarrow \dfrac{\left[2(\omega_0^2-\Omega^2)^2 + 8\lambda^2\Omega^2 + 4\Omega^2(\omega_0^2-\Omega^2) - 8\lambda^2\Omega^2\right]\alpha_2 S_0/M}{2\left[(\omega_0^2-\Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2\right]^{3/2}} = 0$

$\Longrightarrow \dfrac{2(\omega_0^2-\Omega^2)(\omega_0^2+\Omega^2)\alpha_2 S_0/M}{2\left[(\omega_0^2-\Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2\right]^{3/2}} = 0 \Longrightarrow (\omega_0^2-\Omega^2) = 0 \Longrightarrow \boxed{\Omega_R = \omega_0.}$

4) CIRCUIT OSCILLANT EXCITÉ PAR UN GÉNÉRATEUR

4.1 Soit le circuit excité ci-contre. $E(t) = E_0\cos\Omega t$

1. **Trouver l'équation du mouvement de la charge** q **circulant dans le circuit à l'aide de la loi des mailles.**
2. **Trouver** à l'aide de la représentation complexe **la solution permanente**. (Préciser son amplitude réelle A et sa phase ϕ.)
3. **Donner la pulsation de résonance** Ω_R.
4. **Donner les pulsations de coupure** Ω_{c1}, Ω_{c2}, **et déduire la bande passante** $\lambda \ll \omega_0$.
5. **Calculer** Ω_R, B, **et le facteur de qualité pour** $R = 20\Omega$, $C = 1\mu$F, $L = 5$H.



Solution :

1. La loi des mailles nous donne $u_R + u_C + u_L = E(t) \Longrightarrow Ri + \dfrac{q}{C} + L\dfrac{di}{dt} = E(t) \Longrightarrow$

$$\boxed{\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = \frac{E_0}{L}\cos\Omega t.}$$

2. L'équation est de la forme $\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = (E_0/L)\cos\Omega t$. $\lambda = \dfrac{R}{2L}$. $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$.

La solution permanente est $q = A\cos(\Omega t + \phi)$. Utilisons la représentation complexe pour trouver A et ϕ:

$$\boxed{\begin{array}{l}(E_0/L)\cos\Omega t \longrightarrow (E_0/L)e^{j\Omega t} \\ q = A\cos(\Omega t+\phi) \longrightarrow \underline{q}=\underline{A}e^{j\Omega t}.\end{array}}$$

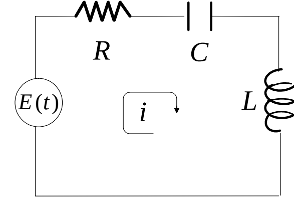
On obtient $-\Omega^2\underline{A}e^{j\Omega t} + 2\lambda j\Omega\underline{A}e^{j\Omega t} + \omega_0^2\underline{A}e^{j\Omega t} = (E_0/L)e^{j\Omega t} \Longrightarrow \underline{A} = \dfrac{E_0/L}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2\lambda j\Omega}$.

L'amplitude est $\boxed{A = \dfrac{E_0/L}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}.}$ La phase est $\boxed{\phi = \arctan\dfrac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}.}$

3. La pulsation de résonance (pour $\frac{\partial A}{\partial\Omega} = 0$) est $\boxed{\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}.}$

4. Lorsque $\lambda \ll \omega_0$: $\langle\mathcal{P}\rangle = \dfrac{\langle\mathcal{P}\rangle_{\max}}{2}$ pour $\boxed{\Omega_{c1} \approx \omega_0 - \lambda. \quad \Omega_{c2} \approx \omega_0 + \lambda.} \Longrightarrow \boxed{B = \Omega_{c2} - \Omega_{c1} = 2\lambda.}$

5. A.N: $\Omega_R \approx \mathbf{447,2}$rad/s. $B = \mathbf{4}$Hz. Le facteur de qualité est $Q = \omega_0/B \approx \mathbf{111,8}$.



4.2 Soit le circuit excité ci-contre. $E(t) = E_0 \cos \Omega t$

1. **Trouver l'équation du mouvement du courant** i **circulant dans le circuit à l'aide de la loi des mailles.**
2. **Trouver** à l'aide de la représentation complexe **la solution permanente**. (Préciser son amplitude réelle I et sa phase ϕ.)
3. **Donner la pulsation de résonance** Ω_R.

Solution :

1. La loi des mailles nous donne $E(t) = u_R + u_C + u_L \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow Ri + \frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} = E(t)$$

$$\Longrightarrow Ri + \frac{\int idt}{C} + L\frac{di}{dt} = E(t)$$

Cette équation est dite ***intégro-différentielle*** *car elle contient une intégrale et une dérivée.*

Pour nous débarrasser de l'intégrale, nous devons dériver toute l'équation:

$$\Longrightarrow R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} + L\frac{d^2i}{dt^2} = \frac{dE(t)}{dt} \Longrightarrow \boxed{\frac{d^2i}{dt} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = \frac{-\Omega E_0}{L}\sin \Omega t.}$$

2. L'équation est de la forme $\frac{d^2i}{dt^2} + 2\lambda\frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \frac{-\Omega E_0}{L}\sin\Omega t.$ $\lambda = \frac{R}{2L}$. $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$.

La solution permanente est $i = I\sin(\Omega t + \phi)$. Utilisons la représentation complexe pour trouver I et ϕ:

$$\boxed{\begin{array}{c} \frac{-\Omega E_0}{L}\sin\Omega t \longrightarrow \frac{-\Omega E_0}{L}e^{j\Omega t} \\ i = I\sin(\Omega t + \phi) \longrightarrow \underline{i} = \underline{I}e^{j\Omega t}. \end{array}}$$

On obtient $-\Omega^2 \underline{I}e^{j\Omega t} + 2\lambda j\Omega \underline{I}e^{j\Omega t} + \omega_0^2 \underline{I}e^{j\Omega t} = \frac{-\Omega E_0}{L}e^{j\Omega t} \Longrightarrow \underline{I} = \frac{-\Omega E_0/L}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2\lambda j\Omega}.$

L'amplitude du courant est $\boxed{I = \frac{\Omega E_0/L}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}.}$ Sa phase est $\boxed{\phi = \pi - \arctan\frac{2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.}$

3. Attention: *La formule du cours* ($\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$) *ne s'applique pas directement pour cet exercice car au numérateur de l'amplitude I nous avons aussi la pulsation* Ω. Ω_R *est donnée par*

$$\frac{\partial I}{\partial \Omega} = 0 \Longrightarrow \frac{\left[2\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 8\lambda^2\Omega^2 + 4\Omega^2\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right) - 8\lambda^2\Omega^2\right]E_0/L}{2\left[\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\Omega^2\right]^{3/2}} = 0 \Longrightarrow \omega_0^2 - \Omega^2 = 0 \Longrightarrow \boxed{\Omega_R = \omega_0.}$$

ENTRAÎNEMENT SUR LE CALCUL DE LA PHASE

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Si } \underline{Z}_1 = x_1 + jy_1 \text{ , } \underline{Z}_2 = x_2 + jy_2 \text{ Alors } \tan\phi_1 = \frac{y_1}{x_1} \Rightarrow \phi_1 = \arctan\frac{y_1}{x_1} \text{ , } \tan\phi_2 = \frac{y_2}{x_2} \Rightarrow \phi_2 = \arctan\frac{y_2}{x_2}. \\ \text{La phase de } \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} \text{ est } \phi = \phi_1 - \phi_2 = \arctan\frac{y_1}{x_1} - \arctan\frac{y_2}{x_2}. \end{array}}$$

Exemple: Trouver la phase de chacune des amplitudes suivantes

1) $\underline{A} = \frac{2}{1+j}$. **2)** $\underline{A} = \frac{-5}{\sqrt{3}+j}$. **3)** $\underline{A} = \frac{3j}{1-j}$. **4)** $\underline{A} = \frac{-2j}{1-j}$. **5)** $\underline{A} = \frac{1+j}{1+\sqrt{3}j}$. **6)** $\underline{A} = \frac{\Omega F_0/a}{\omega_0^2 - \Omega^2 + j2\lambda\Omega}$.

7) $\underline{A} = \frac{-\Omega F_0/a}{\omega_0^2 - \Omega^2 + j2\lambda\Omega}$. **8)** $\underline{A} = \frac{j\Omega F_0/a}{\omega_0^2 - \Omega^2 + j2\lambda\Omega}$. **9)** $\underline{A} = \frac{-j\Omega F_0/a}{\omega_0^2 - \Omega^2 + j2\lambda\Omega}$. **10)** $\underline{A} = \frac{b + j\Omega F_0/a}{\omega_0^2 - \Omega^2 + j2\lambda\Omega}$.

Réponse

1) $\phi = \arctan\frac{0}{2} - \arctan\frac{1}{1} = 0 - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$.

2) $\phi = \arctan\frac{0}{-5} - \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

3) $\phi = \arctan\frac{3}{0} - \arctan\frac{-1}{1} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

4) $\phi = \arctan\frac{-2}{0} - \arctan\frac{-1}{1} = \frac{-\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$.

5) $\phi = \arctan\frac{1}{1} - \arctan\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{12}$.

6) $\phi = 0 - \arctan\frac{2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} = \arctan\frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$.

7) $\phi = \pi - \arctan\frac{2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$.

8) $\phi = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$.

9) $\phi = \frac{-\pi}{2} - \arctan\frac{2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$.

10) $\phi = \arctan\frac{\Omega F_0/a}{b} - \arctan\frac{2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$.